

ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

УДК 372.851
ББК 442.221-24

ГСНТИ 14.01.45

Код ВАК 13.00.02

Липатникова Ирина Геннадьевна,

доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой теории и методики обучения математике, Институт математики, информатики и информационных технологий, Уральский государственный педагогический университет; 620075, г. Екатеринбург, ул. К. Либкнехта, 9; e-mail: lipatnikovaig@mail.ru.

СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ К СОДЕРЖАНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В КОНТЕКСТЕ ДИАЛОГА КУЛЬТУР

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: содержание; математическое образование; диалог культур; многоаспектность; подходы.

АННОТАЦИЯ. Раскрывается проблема понимания многоаспектности математического образования в современном мире и обществе, определяются подходы к его содержанию в контексте диалога культур. Подчеркивается значимость математического образования с позиции диалога культур как важнейшего механизма трансляции и воспроизводства культурных ценностей, норм, идеалов и смыслов жизни, форма и содержание которого обеспечиваются национальной и мировой историей, языком, традициями и развитием различных научных областей. Определяются подходы к содержанию математического образования в контексте диалога культур с позиции трех уровней понимания значимости математического образования: на уровне всего человечества; на государственном уровне; на уровне развития личности. Обосновывается, что с позиции общечеловеческой культуры общее математическое образование, рассматриваемое как культура решения мировоззренческих проблем, становится мировоззренческой культурой. В связи с этим такой уровень культуры позволяет с помощью теоретического способа осмысления проблем образования вести содержательный мировоззренческий диалог. Суть диалога – это не обмен монологами, а поиск общих культурных ценностей при сохранении индивидуальной свободы развития каждого научного направления. Структурирование содержания математического образования с позиции выявленных подходов позволит повысить интерес учащихся к математике, освоить фундаментальное математическое содержание, сформировать у них интеллектуальное мышление, и, соответственно, раскрыть особенности диалога культур.

Lipatnikova Irina Gennad'evna,

Doctor of Pedagogy, Associate Professor, Head of Department of Theory and Methods of Teaching Mathematics, Institute of Mathematics, Informatics and Information Technologies, Ural State Pedagogical University, Ekaterinburg.

MODERN APPROACHES TO THE CONTENTS OF MATHEMATICS EDUCATION IN THE CONTEXT OF THE DIALOGUE OF CULTURES

KEY WORDS: content; mathematics education; dialogue of cultures; multidimensionality; approaches.

ABSTRACT. The article studies the problem of realization of the multidimensional nature of mathematics education in the modern world and society, determines the approaches to its content in the context of the dialogue of cultures. It stresses the importance of mathematics education from the position of the dialogue of cultures as an important mechanism of translation and reproduction of cultural values, norms, ideals and the meaning of life, the form and the content of which stem from national and world history, language, traditions and development of various fields of science. The article also defines the approaches to the content of mathematics education in the context of the dialogue of cultures from the position of three levels of realization of the role of mathematics education: at the level of all humanity; at the state level; at the level of personal development. The author argues that from the point of view of the human culture general mathematics education, regarded as a culture of solution of philosophical problems, becomes a worldview culture. In this regard, such level of culture allows conducting a meaningful worldview dialogue by means of a theoretical method of realization of the problems of education. The essence of dialogue does not lie in an exchange of monologues, but a search for common cultural values while preserving individual freedom of development of each scientific field. Structuring the content of mathematics education from the position of the identified approaches will enhance students' interest in mathematics, help to master the fundamental mathematical content and form their intellectual thinking, thus revealing the features of the dialogue of cultures.

Одним из важнейших направлений государственной политики в области образования является развитие математического образования. Его фундаментальность и значимость как составляющей мирового научно-технического прогресса

обоснована в концепции математического образования в Российской Федерации.

Изучение основ математики в современных условиях становится все более приоритетным направлением для общеобразовательной подготовки молодого поколения.

Статья печатается в рамках исследования по гранту РГНФ № 14-16-66027 «Модель подготовки будущего учителя математики к формированию у учащихся универсальных учебных действий в контексте технологии рефлексивного подхода».

© Липатникова И. Г., 2015

В настоящее время внимание к школьному математическому образованию усиливается во многих странах мира. Анализ мирового опыта позволяет выделить три важные тенденции развития математического образования: понимание необходимости математического образования для всех школьников и широкая постановка соответствующих исследований; стремление к включению общеобразовательных курсов математики в учебные планы на всех ступенях обучения; глубокая дифференциация математической подготовки на старших ступенях школы [5].

Идея значимости математического образования подчеркивается в докладе Джон Глена от Национальной комиссии по математике и естественным наукам для XXI века президенту США под названием «Пока не поздно» (Before It Is Too Late, John Glenn's National Commission on Mathematics and Science Teaching for the 21st Century), «Комиссия убеждена, что на заре нового столетия и тысячелетия будущее благосостояние нашего государства зависит не только от того, насколько мы хорошо обучаем детей в целом, но и от того, насколько мы хорошо обучаем естественным, фундаментальным наукам и математике. Эти науки дают нам продукты, уровень жизни, экономическую и военную безопасность, которые будут поддерживать нас как дома, так и во всем мире» [9].

Продолжение представленного выше прогноза о значимости математического образования отражено в концепции математического образования в Российской Федерации, где отмечается, что без высокого уровня математического образования невозможны выполнение: поставленной задачи по созданию инновационной экономики, реализации долгосрочных целей и задач социально-экономического развития Российской Федерации, модернизации 25 млн. высоко производительных рабочих мест к 2020 году» [4].

Одной из важнейших проблем, заявленных в концепции математического образования, является проблема содержания математического образования, которая апеллирует к проблеме понимания многогранности и многоаспектности математического образования, в частности, в контексте диалога культур. Культурологический подход рассматривает математическое образование как отражение национальной культуры и как фактор ее развития [13 с. 17]. В настоящее время математическое образование является одним из важнейшим механизмом трансляции и воспроизводства культурных ценностей, норм, идеалов и смыслов жизни, форма и содержание которого обеспечиваются национальной и мировой историей, языком, традициями и развитием различных научных областей. Ценностно ориен-

тированное образование формирует «образ личности» как целостного субъекта культуры [12]. В зависимости от основополагающих культурных ценностей и менталитета, характеризующего тот или иной тип культуры, определяются цели образования в целом, и математического образования в частности.

Понимание значимости содержания математического образования с позиции диалога культур позволяет рассматривать его с позиции трех уровней:

- на уровне всего человечества как части общечеловеческой культуры, универсального языка науки, позволяющего описывать и изучать реальные процессы и явления;
- на государственном уровне как источник высокообразованных, творчески мыслящих интеллектуалов, способных решить любые задачи в различных областях науки;
- на уровне развития личности как инструментарий в повседневной жизни; источник умственного развития, формирования духовного мира человека; язык естествознания и техники, самой природы; источник овладения информационными технологиями.

Вышесказанное позволяет подчеркнуть универсальность математических знаний, их целостность в познании окружающего мира и расширить представления о возможностях математики как науки, определить подходы к раскрытию ее многоаспектности. Это связано с тем, что для диалога культур необходимо понимание возможностей современного математического знания.

Первый подход – формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, о значимости математики в развитии цивилизации и современного общества; развитие представлений о математике как форме описания и методе познания действительности, создание условий для приобретения первоначального опыта математического моделирования [14].

Содержание первого подхода предопределено в цитате А. Пуанкаре о понимании значимости чистыми математиками окружающего мира: «Чистый математик, который забыл бы о существовании внешнего мира, был бы подобен живописцу, умеющему гармонически сочетать цвета и формы, но лишенному натуры, модели – его творческая сила быстро бы иссякла» [11].

С позиций общечеловеческой культуры общее математическое образование, рассматриваемое как культура решения мировоззренческих проблем, становится мировоззренческой культурой. Такой уровень культуры позволяет с помощью теоретического способа осмысления проблем образования вести содержательный мировоззрен-

ческий диалог. «Суть диалога – это не обмен монологами, а поиск общих культурных ценностей при сохранении индивидуальной свободы развития каждого научного направления. В этом случае математику следует рассматривать как особенно удобную «модель», потому, что в ней интуитивный и дискурсивный элементы всегда четко разграничены» [15, с. 59]. Логическая безукоризненность рассуждений, ведущих начало от аксиом к теоремам или утверждениям, не единственное достоинство математики, которое может заинтересовать учащихся общеобразовательной школы. Обогащение жизненного опыта учащихся фактами из истории математики, жизни и творчества великих математиков позволит раскрыть потенциал математики как науки и реализовать следующие цели ее обучения:

- формирование научного мировоззрения учащихся;
- повышение общей культуры и расширение кругозора учащихся;
- углубление понимания учащимися изучаемого раздела;
- установление внутрипредметных и межпредметных связей;
- раскрытие роли математики в современном обществе;
- развитие у учащихся чувства прекрасного [8].

При этом указанные целевые векторы

Тогда диаметр основания цилиндра $d = \sqrt{l^2 - x^2}$,
а его объем $V(x) = \frac{\pi x}{4}(l^2 - x^2)$.

Производная $V'(x) = \frac{\pi}{4}(l^2 - 3x^2)$ обращается в нуль в

точках $x = \pm \frac{l}{\sqrt{3}}$. Условию задачи удовлетворяет $x_1 = \frac{l}{\sqrt{3}}$.

Поскольку $V(0) = V(l) = 0$ – минимальное значение объема, то в точке x_1 объем максимален. В этом случае $d_1 = l\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $d_1 : x_1 = \sqrt{2}$.

Доказательство закончено.

Новый метод нахождения экстремума помог Ферма сформулировать общий принцип геометрической оптики, называемый сейчас принципом Ферма.

Второй подход – математика как средство интеллектуального развития чело-

века для его полноценного функционирования в обществе.

Социальная значимость образования с помощью математики заключается в повышении средствами математики уровня интеллектуального развития человека для его полноценного функционирования в обществе, обеспечении функциональной грамотности каждого члена общества, что является необходимым условием повышения интеллектуального уровня общества в целом. В контексте образования с помощью математики образовательную область «Математика», по мнению Г. В. Дорофеева, следует рассматривать «как предмет общего обра-

определяют социально-психологическую необходимость личностной ориентации обучения, которая обеспечивает каждому учащемуся возможность выбора индивидуальной траектории обучения, определяемого личным целевым вектором.

Проиллюстрируем сказанное на примере. Учащимся 11-х классов будет интересно сравнить геометрический подход к решению задач на поиск экстремальных точек и эффективность использования метода Ферма.

Несомненно, что открытие метода Ферма упрощает поиск экстремальных точек. Однако геометрический подход не обладает универсальностью, к тому же геометрическое решение для некоторых задач чрезвычайно громоздко [16]. Так, Кеплер в «Новой стереометрии винных бочек» доказывает утверждение:

Из всех цилиндров, имеющих одну и ту же диагональ, самым вместительным будет тот, в котором отношение диаметра основания к высоте равно $\sqrt{2}$.

Геометрическое доказательство занимает несколько страниц. Посмотрим, насколько оно велико, если использовать производную.

Пусть l – диагональ цилиндра, x – его высота (рис.1), $0 \leq x \leq l$.

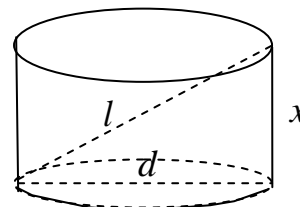


Рис.1

зования, ведущей целью которого является интеллектуальное воспитание, развитие мышления подрастающего человека, необходимое для свободной и безболезненной адаптации его к условиям жизни в современном обществе» [18].

Неслучайно известный польский математик Гуго Штейнгауз считал, что «между духом и материей посредничает математика» [17].

Развитие личности учащегося, его интеллекта, чувств, воли осуществляется лишь в активной деятельности. Человеческая психика не только проявляется, но и формируется в деятельности, и вне деятельности она развиваться не может [7]. В форме нейтрально-пассивного восприятия нельзя сформировать ни прочных знаний, ни глубоких убеждений, ни гибких умений.

Способность учащихся к творческой (а значит, и к исследовательской) деятельности эффективно развивается в процессе их целесообразно организованной деятельности под руководством учителя.

При этом важно помнить, что развивает не само знание, а специальное его конструирование, моделирующее содержание научной области, методы ее познания [19].

Как в развитии математических теорий в целом, так и в творчестве отдельных математиков процесс познания начинается с установления отдельных фактов, выявления закономерностей на основе наблюдений, сравнения вычислений, измерений и т. д. Неслучайно У. У. Соьер в своей книге «Прелюдия к математике» назвал математику «наукой о всевозможных закономерностях». Д. Пойа [10] на различных примерах убедительно показывает этот процесс в творчестве выдающегося математика Л. Эйлера. В 1267 году знаменитый английский философ Роджер Бекон сказал: «Кто не знает математики, не может узнать никакой другой науки и даже не может обнаружить своего невежества». Ф. Клейн [11] приводит примеры, как К. Ф. Гаусс в поисках арифметических закономерностей выполнил многочисленные и трудоемкие вычисления с конкретными числами. В результате накопления фактов и выявления некоторых закономерностей эмпирическим путем далее на их основе, а также интуитивно выдвигаются гипотезы. В математике они должны быть доказаны или опровергнуты логически.

Очевидно, что творческая деятельность ученика не может быть полностью адекватна деятельности математика. Речь идет о субъективном исследовании ученика, когда он становится соучастником получения субъективного нового для него знания. И. Я. Лернер творчеством ученика называет вид его деятельности, направленный на

создание качественно новых ценностей, имеющих общественное значение, важных для формирования личности как общественного субъекта [6].

Приведем пример работы учащихся с теоремой, в процессе которой учащиеся овладевают навыками наблюдения, экспериментирования, сопоставления и обобщения фактов, формулирования выводов.

Учащимся предлагается теорема, в содержании которой необходимо выявить формулировки двух теорем.

Теорема: CM – медиана треугольника ABC . Для того, чтобы $\triangle ABC$ был прямоугольным, необходимо и достаточно, чтобы $CM = \frac{1}{2} AB$.

В теореме сформулированы две теоремы:

1) если $\triangle ABC$ прямоугольный ($\angle C = 90^\circ$) и CM – медиана, то

$$CM = \frac{1}{2} AB;$$

2) если CM – медиана треугольника

$CM = \frac{1}{2} AB$, то $\triangle ABC$ прямоугольный ($\angle C = 90^\circ$).

Предлагаются вопросы творческого характера.

1. Какая из этих двух теорем является достаточным признаком прямоугольного треугольника?

2. Какая из этих теорем является необходимым свойством прямоугольного треугольника?

3. Какая из этих теорем является достаточным признаком того, что медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена?

4. Какая из этих теорем является необходимым свойством того, что медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена?

Развивающая функция творческой математической деятельности учащихся заключается в том, что в процессе ее выполнения происходит усвоение методов и стиля математического мышления.

Проиллюстрируем сказанное конкретным примером.

После изучения признака подобия треугольников по двум углам целесообразно формулировать задачи на построение, которые можно решить, зная этот признак подобия.

Пример задачи. Дан $\triangle ABC$, $M \in BC$. Через точку M провести прямую так, чтобы получить треугольник, подобный данному.

Решение. Пусть в новом треугольнике остается угол B . Обозначим новый тре-

угольник $\triangle BMN$ ($N \in BA$, $\angle BMN = \angle C$,
 тогда $MN \parallel AC$ (рис. 2) или $\angle BMN = \angle A$,
 надо построить $\angle BNM = \angle C$ (рис. 3).

Точку М можно взять на прямой ВС вне отрезка ВС (рис. 4, 5).

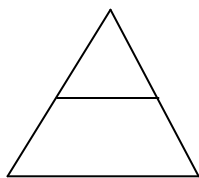


Рис. 2

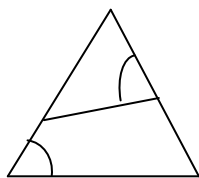


Рис. 3

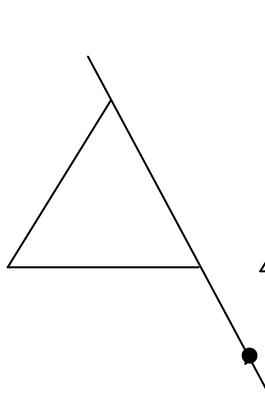


Рис. 4

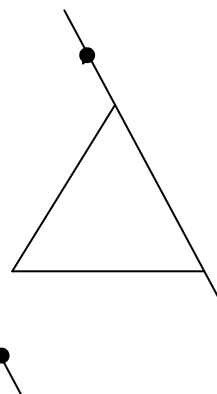


Рис. 5

Третий подход – прикладная направленность математики.

Прикладная направленность обучения математике предполагает ориентацию его содержания и методов на тесную связь с жизнью, основами других наук, на подготовку школьников к использованию математических знаний в предстоящей профессиональной деятельности. В настоящее время под прикладной направленностью принято понимать требование к обучению математике, при котором не только будут освоены учащимися некоторые факты математической теории, но и показано, как эта теория может быть применена в той или иной предметной области, внешней по отношению к данной теории.

Кроме того, в качестве средств прикладной направленности школьного курса математики могут быть рассмотрены задачи, направленные на формирование такого уровня математической культуры школьника, который характеризуется:

- осознанным пониманием происхождения математических объектов;
- представлением о возможности применения математики к решению практических задач, возникающих в разнообразных областях знаний;
- представлением о ее приложениях к различным сферам деятельности человека.

Формулы, синуса суммы и синуса разности, косинус суммы и разности, формулы, позволяющие переходить от произведения тригонометрических функций к их сумме, применяются в радиотехнике [2]. Пусть нам надо передать по радио голос диктора частотой, скажем, 300 Гц. На таких низких частотах вести радиопередачу невозможно: частоты радиоволн, применяемых для радиовещания, могут измеряться миллионами Гц. Волны таких частот используют так. Пока диктор молчит, в эфир идут только радиоволны высокой частоты ω (несущая частота – график на рис. 6).

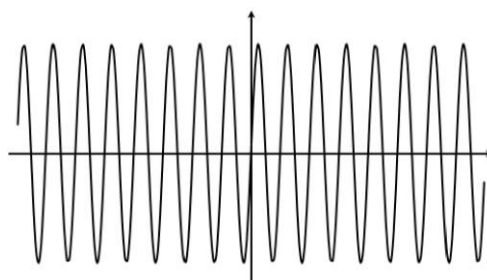


Рис. 6. Диктор молчит

Никакой информации с этим сигналом не передается. Пусть теперь диктор начал издавать звуки с частотой η (η много меньше, чем ω); тогда в эфире идет сигнал

$v = (A \sin \eta t) \sin \omega t$. Примерный график его представлен на рис. 7.

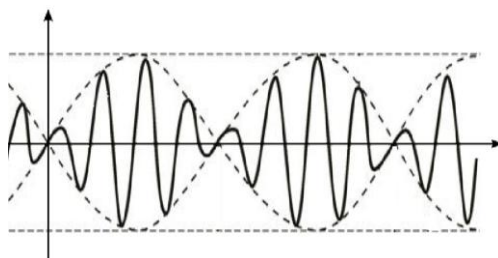


Рис. 7. Диктор говорит

Можно сказать, что амплитуда колебаний высокой частоты ω сама претерпевает колебания с низкой частотой η . Как говорят, высокочастотный сигнал модулируется низкочастотным (все сказанное — лишь гру-

бая схема того, что на самом деле происходит в приемнике).

Преобразуем выражение для модулированного сигнала:

$$u = A \sin \eta t \sin \omega t = \frac{A}{2} \cos(\omega - \eta)t - \frac{A}{2} \cos(\omega + \eta)t.$$

Как видим, наш модулированный сигнал — не что иное, как сумма сигналов с частотами $\omega + \eta$ и $\omega - \eta$. Так что когда говорят, что радиостанция ведет передачу на частоте, скажем, $\omega = 10\text{МГц}$, то надо помнить, что фактически в эфир идут не только радиоволны частоты ω , но и волны всех частот из интервала $[\omega - \eta; \omega + \eta]$, где η — максимальная частота полезного сигнала, передаваемого радиостанцией. Значит, несущие частоты различных радиостанций не могут быть слишком близки друг к другу: если отрезки $[\omega - \eta; \omega + \eta]$ будут перекрываться, то радиостанции будут мешать друг дружке.

Четвертый подход — математика — это язык науки и жизни.

В конце XIX и начале XX вв. идея универсального языка для всей математики была доминирующей. Несомненно, что каждый фрагмент математики требует особого своего языка, наиболее подходящего для решения соответствующих задач. Основным мотивом при создании подходящего языка для каждого фрагмента математики является стремление получить результаты наиболее простым и ясным методом. «Сколь ни искусственно, а иногда и сказочно математическое описание, в нем есть своя мораль. Для мыслящего ученого математическое описание всегда было неиссякаемым источником удивления, рожденного тем, что

природа проявляет столь высокую степень соответствия математическим формулам» [1, с. 59]. Математический язык не допускает неопределенности и чрезмерной избыточности информации. Но формальные языки, как и естественные разговорные языки, обладают ограниченными возможностями, поэтому в полной мере сила неформализованных и формализованных языков проявляется в их совместном использовании. В этом синтезе проявляется сила языка математических абстракций с использованием реального многообразия логических возможностей в математике.

В 2012 году в Бостоне прошла премьера документального фильма «Чувственная математика». Герои этого фильма представляют математику как язык, на котором мир разговаривает с нами. Математика может быть чувственной. У нее есть вкус, она звучит и имеет цвет. Ее можно ощутить, и она может трогать. Ею можно описать мир. При этом описать не значит упростить, свести к схемам и формулам, а представить мир через призму математики, описать его проблемы и вероятность их решения математическими задачами, перевести мир с одного языка культуры на другой — язык науки. Фильм «Чувственная математика» состоит из нескольких эпизодов. Режиссер выделяет по одному эпизоду на каждое чувство: вкус, зрение, обоняние, осязание, слух и чувство баланса, при этом, в фокусе внимания прежде всего личность. «Чувственная математика» — это прежде всего люд-

ские истории, портреты с натуры, очень метко выхваченные из жизненного потока. Герои фильма – выдающиеся математики и наши современники: Максим Концевич, Жан Мишель Бисмут, Цедрик Виллани, Анатолий Фоменко, Ади Ранган и Гюнтер Циглер.

Структурирование содержания математического образования с позиции представленных выше подходов позволит повысить интерес учащихся к математике, освоить фундаментальное математическое содержание, сформировать у учащихся интеллектуальное мышление, и, соответственно, раскрыть особенности диалога культур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арсенов О. О. Григорий Пелерман и гипотеза Пуанкаре. Решение одной из самых удивительных проблем математики. М. : Наука, 2010.
2. Гельфанд И. М., Львовский С. М., Тоом А. Л. Тригонометрия. М. : МЦНМО, 2000.
3. Иванова Т. А., Перевощикова Е. Н., Кузнецова Л. И., Григорьева Т. П. Теория и технология обучения математике в средней школе: учеб. пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов / под ред. Т. А. Ивановой. 2-е изд., испр. и доп. Н. Новгород: ННГУ, 2009.
4. Концепция развития математического образования в Российской Федерации: 24.12.2013. URL: <http://минобрнауки.рф/документы/3650/файл/2730/Концепция%20развития%20математического%20образования%20в%20РФ.pdf>.
5. Кудрявцев Л. Модернизация средней школы и математическое образование. URL: http://mat.iseptember.ru/2002/38/no38_1.htm.
6. Лернер И. Я. Учебный предмет, тема, урок. М. : Знание, 1988.
7. Липатникова И. Г. Проблема формирования умения учиться // Теоретические и прикладные вопросы образования и науки : сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции. Тамбов, 2014. С. 88–91.
8. Липатникова И. Г. Подготовка будущих учителей математики к осуществлению межкультурного диалога в процессе профессиональной деятельности // Педагогическое образование в России. 2014. № 5. С. 209–214.
9. Не нужно повторять ошибки США // Газета. ru: URL: http://www.gazeta.ru/lifestyle/education/2013/01/14_e_4923217.shtml.
10. Пойа Д. Как решать задачу. М. : Учпедгиз, 1961.
11. Пуанкаре А. О науке. М. : Наука, 1990.
12. Тихомиров В. М. О некоторых проблемах математического образования // Математическое образование. Настоящее и будущее. Всероссийская конференция «Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков. Дубна, 2000. М. : МЦНМО, 2000.
13. Тряпицин А. В. Межкультурное взаимодействие специалистов в области образования (к вопросу о логике исследования проблемы) // Образование в современном мире: зарубежный опыт : сборник научных статей. СПб. : РГПУ им. А. И. Герцена, 2004. С. 17.
14. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. URL: http://www.edu.ru/db-mon/mo/Data/d_10/prgm1897-1.pdf.
15. Фейнберг Е. П. Две культуры. Интуиция и логика в искусстве и науке. М. : Наука, 2004.
16. Шибасов Л. П. За страницами учебника математики: матем. анализ. Теория вероятностей : пособие для учащихся 10–11 кл. М. : Просвещение, 2008.
17. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. М. : Наука, 1981.
18. «Школа 2000...». Математика для каждого: концепция, программы, опыт работы. / под ред. Г. В. Дорофеева. М. : УМЦ «Школа 2000...», 2000.
19. Якиманская И. С. Личностно ориентированное обучение в современной школе. М. : Сентябрь, 1996.

LITERATURE

1. Arsenov O. O. Grigoriy Pelerman i gipoteza Puankare. Reshenie odnoy iz samykh udivitel'nykh problem matematiki. M. : Nauka, 2010.
2. Gel'fand I. M., L'vovskiy S. M., Toom A. L. Trigonometriya. M. : MTsNMO, 2000.
3. Ivanova T. A., Perevoshchikova E. N., Kuznetsova L. I., Griror'eva T. P. Teoriya i tekhnologiya obucheniya matematike v sredney shkole: ucheb. posobie dlya studentov matematicheskikh spetsial'nostey pedagogicheskikh vuzov / pod red. T. A. Ivanovoy. 2-e izd., ispr. i dop. N. Novgorod: NPGU, 2009.
4. Kontseptsiya razvitiya matematicheskogo obrazovaniya v Rossiyskoy Federatsii: 24.12.2013. URL: <http://minobrnauki.rf/dokumenty/3650/fayl/2730/Kontseptsiya%20razvitiya%20matematicheskogo%20obrazovaniya%20v%20RF.pdf>.
5. Kudryavtsev L. Modernizatsiya sredney shkoly i matematicheskoe obrazovanie. URL: http://mat.iseptember.ru/2002/38/no38_1.htm.
6. Lerner I. Ya. Uchebnyy predmet, tema, urok. M. : Znanie, 1988.
7. Lipatnikova I. G. Problema formirovaniya umeniya uchit'sya // Teoreticheskie i prikladnye voprosy obrazovaniya i nauki : sbornik nauchnykh trudov po materialam Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii. Tambov, 2014. S. 88–91.
8. Lipatnikova I. G. Podgotovka budushchikh uchiteley matematiki k osushchestvleniyu mezhkul'turnogo dialoga v protsesse professional'noy deyatel'nosti // Pedagogicheskoe obrazovanie v Rossii. 2014. № 5. S. 209–214.
9. Ne nuzhno povtoryat' oshibki SShA // Gazeta. ru: URL: http://www.gazeta.ru/lifestyle/education/2013/01/14_e_4923217.shtml.

10. Poya D. Kak reshat' zadachu. M. : Uchpedgiz, 1961.
11. Puankare A. O nauke. M. : Nauka, 1990.
12. Tikhomirov V. M. O nekotorykh problemakh matematicheskogo obrazovaniya // Matematicheskoe obrazovanie. Nastoyashchee i budushchee. Vserossiyskaya konferentsiya «Matematika i obshchestvo. Matematicheskoe obrazovanie na rubezhe vekov. Dubna, 2000. M. : MTsNMO, 2000.
13. Tryapitsin A. V. Mezhekul'turnoe vzaimodeystvie spetsialistov v oblasti obrazovaniya (k voprosu o logike issledovaniya problemy) // Obrazovanie v sovremennom mire: zarubezhnyy opyt : sbornik nauchnykh statey. SPb. : RGPU im. A. I. Gertsena, 2004. S. 17.
14. Federal'nyy gosudarstvennyy obrazovatel'nyy standart osnovnogo obshchego obrazovaniya. URL: http://www.edu.ru/db-mon/mo/Data/d_10/prm1897-1.pdf.
15. Feynberg E. P. Dve kul'tury. Intuitsiya i logika v iskusstve i nauke. M. : Nauka, 2004.
16. Shibasov L. P. Za stranitsami uchebnika matematiki: matem. analiz. Teoriya veroyatnostey : posobie dlya uchashchikhsya 10–11 kl. M. : Prosveshchenie, 2008.
17. Shteyngauz G. Matematicheskiy kaleydoskop. M. : Nauka, 1981.
18. «Shkola 2000...». Matematika dlya kazhdogo: kontseptsiya, programmy, opyt raboty. / pod red. G. V. Dorofeeva. M. : UMTs «Shkola 2000...», 2000.
19. Yakimanskaya I. S. Lichnostno orientirovannoe obuchenie v sovremennoy shkole. M. : Sentyabr', 1996.

Статью рекомендует д-р пед. наук, профессор Б. Е. Стариченко.